16 Dualisierung

K beliebiger Körper

V, W K-Vektorraum

16.1 Def: Der *Dualraum* zu V ist der K-VR

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$$
$$= \{ \varphi : V \to K \mid \varphi \ K\text{-linear} \}$$

mit der VR-Struktur aus Satz/Def. 6.5:

$$(\varphi + \psi)(\underline{v}) := \varphi(\underline{v}) + \psi(\underline{v})$$
$$(a \cdot \varphi)(\underline{v}) := a \cdot \varphi(\underline{v})$$

für $a \in K$, $\varphi, \psi \in V^*$, $\underline{v} \in V$.

Elemente von V^* heißen *Linearformen* auf V.

Die zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ *duale Abbildung* ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{\ f^*\ } & W^* \\ \varphi \circ f & \leftarrow\!\shortmid & \varphi \end{array}$$

$$\left(\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*\varphi = \varphi\circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd} \right)$$

16.2 Notiz: Die duale Abbildung ist wieder K-linear.

($f^*(\varphi + \psi) = f^*\varphi + f^*\psi$, denn für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$$(f^*(\varphi+\psi))(\underline{v}) = (\varphi+\psi)(f(\underline{v})) = \varphi(f(\underline{v})) + \psi(f(\underline{v}))$$
$$= (f^*\varphi)(\underline{v}) + (f^*\psi)(\underline{v})$$
$$= (f^*\varphi + f^*\psi)(\underline{v});$$

analog $f^*(a \cdot \varphi) = a \cdot f^*\varphi$)

16.3 Satz & Def:

Sei $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ eine endliche Basis von V.

Sei $b_i^* \in V^*$ gegeben durch

$$b_i^* : V \longrightarrow K$$
$$\underline{b}_j \longmapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

"Kronecker – δ"

(eindeutig definiert nach Satz 7.1).

Dann ist

$$\mathcal{B}^* := (\underline{b}_1^*, \dots, \underline{b}_n^*) \text{ eine Basis von } V^*,$$

die zu $\mathcal{B}$ duale Basis.

Beweis, dass $\mathcal{B}^*$ eine Basis ist:

linear unabhängig:

Sei $\sum_i a_i \underline{b}_i^* = 0$ (Nullabbildung) $\in V^*$.

Dann ist insbesondere für jedes $\underline{b}_j$:

$$\left(\sum_i a_i \underline{b}_i^*\right)(\underline{b}_j) = 0$$
$$\parallel$$
$$\sum_i a_i \cdot \underline{b}_i^*(\underline{b}_j)$$
$$\parallel$$
$$a_j$$

Also $a_j = 0$ für jedes j.

Erzeugendensystem:

Sei $\varphi \in V^*$ beliebig, $a_i := \varphi(\underline{b}_i)$.

Dann ist $\varphi = \sum_i a_i b_i^*$, denn für alle $\underline{b}_j$ gilt

$$\varphi(\underline{b}_j) = a_j = \left(\sum_i a_i \underline{b}_i^*\right)(\underline{b}_j),$$

und nach Satz 7.1 ist φ eindeutig durch die Werte $\varphi(\underline{b}_j)$ bestimmt. $\square$

Eine Linearform $\varphi \in (K^n)^*$ ist eine lineare Abb.

$$K^n \xrightarrow{\varphi} K,$$

wird also (bezüglich Standardbasis) durch einen Zeilenvektor $\varphi = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n)$ beschrieben.

Beispiele:

1. K^n hat Standardbasis

$$\mathcal{E} := (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) \quad \text{mit} \quad \underline{e}_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathcal{E}^* = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) \quad \text{mit} \quad \underline{e}_i^* = \underline{e}_i^T$$
$$= \begin{array}{c} (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0) \\ i \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0) \\ i \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} = \delta_{ij} \quad \checkmark$$

2. K^2 hat Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Hier ist $\mathcal{B}^* = \big((1 \ -1), \ (0 \ 1) \big)$:

$$(1 \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad (1 \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(0 \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (0 \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

16.4

„$\underline{b}_i^*$" hängt immer von der gesamten Basis ab und nicht nur von $\underline{b}$.

In Bsp. 1: $\underline{e}_1^* = (1 \ 0)$ (für $n=2$)

In Bsp. 2: $\underline{e}^* = (1 \ -1)$

16.5 Korollar: Für einen endlich-dimensionalen VR V ist auch V^* endlich-dimensional, und $\dim V = \dim V^*$.

16.6 Wir können durch
$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \sum a_i b_i & \longmapsto & \sum a_i b_i^* \end{array}$$
einen Isomorphismus definieren, aber dieser ist abhängig von der Wahl einer Basis.

Für unendlich-dimensionale VR ist im Allgemeinen $V^* \not\cong V$.

16.7 Satz: Seien V_i K-VR $(i \in I)$.
$$\left(\bigoplus_i V_i\right)^* \cong \prod (V_i^*)$$
Genauer definieren
$$\varphi \overset{\alpha}{\longmapsto} (\varphi|_{V_i})_{i \in I}$$
$$\left((v_i)_{i \in I} \mapsto \Sigma_i \varphi_i(v_i)\right) \overset{\beta}{\longleftarrow} (\varphi_i)_{i \in I}$$
zueinander inverse Isomorphismen von K-VR.

Beweis:

- $\alpha(\varphi)$ wohldefiniert & linear ✓
- α linear ✓
- $\beta((\varphi_i)_i)$ jeweils wohldefiniert:
  Für jedes Tupel $(v_i)_i \in \bigoplus_i V_i$ sind fast alle $v_i = 0$.
  Also ist $\Sigma_i \varphi_i(v_i)$ endliche Summe.
  $\beta((\varphi_i)_i)$ linear ✓
- $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ ✓
- $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$: $\left(\beta(\alpha(\varphi))\right)\left((v_i)_{i \in I}\right)$

$$= \Sigma_i \varphi|_{V_i}(v_i) = \Sigma_i \varphi(0, \ldots, 0, v_i, 0, \ldots, 0) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \varphi((v_i)_i) \quad \square$$

Fortsetzung

Wähle $K = \mathbb{Q}$, $\quad V := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}$

Nach Satz 16.7 ist $V^* \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}$

V und V^* können nicht isomorph sein, denn sie sind noch nicht einmal als Mengen isomorph:

$$\left.\begin{array}{l} V \text{ ist abzählbar,} \\ V^* \text{ ist überabzählbar.} \end{array}\right\} \text{(Vorlesung Mengentheorie?)}$$

Dualisieren von Abbildungen entspricht transponieren von Matrizen:

16.8 Satz:

V VR mit endlicher Basis B; B^* duale Basis

W VR mit endlicher Basis C; C^* duale Basis

$$V \xrightarrow{f} W \text{ linear.}$$

$$V^* \xleftarrow[f^*]{} W^*$$

Es ist

$$_{B^*}M_{C^*}(f^*) = {}_CM_B(f)^T.$$

Beweis:

$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$; $C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m)$.

$_CM_B(f) = (m_{ij})_{ij}$ ist bestimmt durch

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{c}_i. \qquad (\square)$$

$_{B^*}M_{C^*}(f^*) = (m^*_{ij})_{ij}$ ist bestimmt durch

$$f^*(\underline{c}_j^*) = \sum_i m^*_{ij} \underline{b}_i^*. \qquad (*)$$

Werte $(*)$ an $\underline{b}_k$ aus:

$$f^*(\underline{c}_j^*)(\underline{b}_k) = \sum_i m^*_{ij} \underline{b}_i^*(\underline{b}_k)$$

$$\begin{aligned}
f^*(\underline{c}_j^*)(\underline{b}_k) &\overset{\text{Def. } f^*}{=} \underline{c}_j^*(f(\underline{b}_k)) \\
&\overset{(\square)}{=} \underline{c}_j^*\Big(\sum_i m_{ik} \underline{c}_i\Big) \\
&\overset{\underline{c}_j^* \text{ linear}}{=} \sum_i m_{ik} \underline{c}_j^*(\underline{c}_i) \\
&\overset{\text{Def. duale Basis}}{=} \sum_i m_{ik} \delta_{ji} \\
&= m_{jk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i m^*_{ij} \underline{b}_i^*(\underline{b}_k) &\overset{\text{Def. duale Basis}}{=} \sum_i m^*_{ij} \cdot \delta_{ik} \\
&= m^*_{kj}
\end{aligned}$$

$\square$

16.9 Korollar: Für eine lineare Abb. f zwischen endlich-dim. Vektorräumen gilt: $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$.

Beweis:

Für $f: V \longrightarrow W$ ist

$\operatorname{rk} f = \dim(\operatorname{im} f) = $ (Zeilen)Rang von ${}_C M_B(f)$

(für beliebige Basen B von V und C von W.)

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\operatorname{rk} f^* &= \text{(Zeilen)Rang von } {}_{B^*}M_{C^*}(f) \\ &= \text{Spaltenrang von } \underbrace{{}_{B^*}M_{C^*}(f)^T}_{{}_C M_B(f) \text{ nach 16.8}}\end{aligned}$$

Nach Rangsatz 6.33 ist Zeilenrang = Spaltenrang, also $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$. $\square$

Wir werden $\operatorname{im}(f^*)$ (und $\operatorname{ker}(f^*)$) jetzt noch einmal genauer studieren.

16.10 Def: Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Der **Annulator** von U ist der UVR

$$U^\circ \subseteq V^*,$$

der gegeben ist durch

$$U^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

16.11 Notiz: Das ist wirklich ein UVR, denn

$$U^\circ = \operatorname{ker}\left(\begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & U^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi|_U \end{array}\right).$$

16.12 Satz: Für jede lineare Abbildung f ist

$$\ker(f^*) = (\operatorname{im} f)^\circ$$
$$\operatorname{im}(f^*) = (\ker f)^\circ$$

Beweis:

$\ker(f^*) = (\operatorname{im} f)^\circ$:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im}(f) \arrow[dr, hook] & \\
V \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, dashed, "0"'] & & W \arrow[d, "\varphi"] \\
& & K
\end{tikzcd}$$

$\varphi \in \ker(f^*)$

$\iff \varphi \circ f = \text{Nullabbildung}$

$\iff \varphi(f(\underline{v})) = \underline{0}$ für alle $\underline{v} \in V$

$\iff \varphi(\underline{w}) = \underline{0}$ für alle $\underline{w} \in \operatorname{im} f$

$\iff \varphi \in (\operatorname{im} f)^\circ$.

$\operatorname{im}(f^*) \subseteq (\ker f)^\circ$:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[dr, hook] \arrow[rr, bend left, "0"] & & \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, dotted, "\psi"] \\
& & K
\end{tikzcd}$$

$\varphi \in \operatorname{im}(f^*)$

$\iff \varphi = \psi \circ f$ für ein $\psi \in W^*$

$\Rightarrow \varphi(\underline{v}) = \psi(f(\underline{v})) = \psi(\underline{0}) = \underline{0}$ für alle $\underline{v} \in \ker(f)$

$\Rightarrow \varphi \in (\ker f)^\circ$.

$\operatorname{im}(f^*) \supseteq (\ker f)^\circ$:

Sei $\varphi \in (\ker f)^\circ$. Wir müssen $\psi \in W^*$ konstruieren mit $\varphi = \psi \circ f$. Isomorphiesatz 4.25 liefert Faktorisierung von f:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, hook] \arrow[ddr, "0"'] & V \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & & & W \arrow[ddlll, dotted, bend left, "\psi"] \\
& & V/\ker f \arrow[r, "\bar f", "\cong"'] \arrow[dl, dashed, "\bar\varphi"] & \operatorname{im} f \arrow[ur, hook] \arrow[dll, dashed, "\bar\varphi \circ \bar f^{-1}"] & \\
& K & & &
\end{tikzcd}$$

Schritt 1: Da $\varphi(\underline{v}) = \underline{0}$ ist für alle $\underline{v} \in \ker f$, ist

$$\overline{\varphi} : V/_{\ker f} \longrightarrow K$$
$$[\underline{v}] \longmapsto \varphi(\underline{v})$$

wohldefinierte lineare Abbildung. Nach Konstruktion ist

$$\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi.$$

Schritt 2: $$\varphi = \overline{\varphi} \circ \overline{f}^{-1} \circ \overline{f} \circ \pi .$$

Schritt 3: Sei W' ein Komplement zu $\operatorname{im} f$ in W, sodass also gilt:

$$W = \operatorname{im} f \oplus W'$$

(siehe Notiz 15.15). Definiere ψ durch

$$\psi(\underline{w}) := (\overline{\varphi} \circ \overline{f}^{-1})(\underline{w}) \quad \text{für } \underline{w} \in \operatorname{im} f,$$
$$\psi(\underline{w}') := \underline{0} \quad \text{für } \underline{w}' \in W',$$

also insgesamt

$$\psi(\underline{w}, \underline{w}') = (\overline{\varphi} \circ \overline{f}^{-1})(\underline{w}).$$

Jetzt ist für alle $\underline{v} \in V$:

$$\begin{aligned}(\psi \circ f)(\underline{v}) &= \psi(f(\underline{v})) \\ &= \psi(\overline{f}\pi(\underline{v}), \underline{0}) \\ &= \overline{\varphi}\, \overline{f}^{-1} \overline{f} \pi(\underline{v}) \\ &= \varphi(\underline{v}) \qquad \text{(siehe Schritt 2)},\end{aligned}$$

also $\psi \circ f = \varphi$.

$\square$

16.13 Korollar:

f injektiv $\Longleftrightarrow$ f^* surjektiv

f surjektiv $\Longleftrightarrow$ f^* injektiv

Beweis:

$$f \text{ injektiv} \Longleftrightarrow \ker f = \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow (\ker f)^\circ = V^* \qquad \{0\}^\circ = V^*$$

$$\overset{16.12}{\Longleftrightarrow} \operatorname{im}(f^*) = V^* \Longleftrightarrow f^* \text{ surjektiv.}$$

Zweite Aussage analog. $\square$

16.14 Korollar: Ist V endlich-dimensional, so gilt für jeden UVR $U \subseteq V$:

$$\dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

Beweis:

Sei $i: U \hookrightarrow V$ die kanonische Inklusion.

Es ist $U^\circ = \ker\left(i^*: V^* \to U^*,\ \varphi \mapsto \varphi|_U = \varphi \circ i\right)$,

also ist nach der Rangformel 5.17

$$\dim V^* = \dim(\underbrace{\operatorname{im} i^*}_{\substack{\text{surjektiv} \\ \text{laut } 16.13}}) + \dim U^\circ$$

$$= \dim U^* + \dim U^\circ,$$

und nach Korollar 16.5 ist $\dim V^* = \dim V$,

$\dim U^* = \dim U$. $\square$

Zweiter Beweis von Korollar 16.9:

Für $f: V \to W$ ist

$$\operatorname{rk} f^* \overset{\text{Def.}}{=} \dim(\operatorname{im} f^*) \overset{16.12}{=} \dim((\ker f)^\circ)$$

$$\underset{16.14}{=} \dim V - \dim \ker f \underset{\substack{\text{Rangformel} \\ 5.17}}{=} \operatorname{rk} f.$$

$\square$

(An dieser Stelle könnten wir jetzt noch einmal mit Hilfe von Satz 16.8
Zeilenrang = Spaltenrang folgern.)

Bidualraumhomomorphismus

Def 16.15: Der Bidualraum eines K-VRs V ist $V^{**} := (V^*)^*$

Der Bidualraumhomomorphismus ist die Abbildung

$$\omega_V : V \longrightarrow V^{**}$$
$$\underline{v} \longmapsto (\varphi \mapsto \underbrace{\varphi(\underline{v})}_{\in K})$$

$\varphi \in V^*$, also $\varphi : V \longrightarrow K$

Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist „kanonisch": er hängt nicht von Wahl einer Basis ab.

Notiz 16.16: Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist K-linear.

(Schreibe ω für ω_V.

$\omega(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = \omega(\underline{v}_1) + \omega(\underline{v}_2)$, denn für alle $\varphi \in V^*$ ist

$$\big(\omega(\underline{v}_1+\underline{v}_2)\big)(\varphi) = \varphi(\underline{v}_1+\underline{v}_2) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \varphi(\underline{v}_1) + \varphi(\underline{v}_2)$$
$$= \omega(\underline{v}_1)(\varphi) + \omega(\underline{v}_2)(\varphi) \overset{\text{Def. von + auf } (V^*)^*}{=} \big(\omega(\underline{v}_1)+\omega(\underline{v}_2)\big)(\varphi)$$

Analog sieht man $\omega(a\cdot\underline{v}) = a\cdot\omega(\underline{v})$.)

Notiz 16.17: Der Bidualraumhomomorphismus ist „natürlich": für jede lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega_V"'] & W \arrow[d, "\omega_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

(d.h. $f^{**} \circ \omega_V = \omega_W \circ f$).

Beweis:

$f^{**} \circ \omega_V = \omega_W \circ f$, denn für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$(f^{**} \circ \omega_V)(\underline{v}) = (\omega_W \circ f)(\underline{v})$, denn für alle $\varphi \in W^*$ gilt:

$\big((f^{**} \circ \omega_V)(\underline{v})\big)(\varphi) = \big((\omega_W \circ f)(\underline{v})\big)(\varphi)$:

Links: $(f^{**} \circ \omega_V)(\underline{v}) = (f^*)^*(\omega_V(\underline{v}))$

$\overset{\text{Def. (Abbildung)}^*}{=} \omega_V(\underline{v}) \circ f^*$, also

$\big((f^{**} \circ \omega_V)(\underline{v})\big)(\varphi) = \omega_V(\underline{v})(f^*(\varphi))$

$\overset{\text{Def. } \omega}{=} (f^*\varphi)(\underline{v})$

$\overset{\text{Def. } f^*}{=} \underline{\underline{\varphi(f(\underline{v}))}}$

Rechts: $(\omega_W \circ f)(\underline{v}) = \omega_W(f(\underline{v}))$, also

$\big((\omega_W \circ f)(\underline{v})\big)(\varphi) = \big(\omega_W(f(\underline{v}))\big)(\varphi)$

$= \underline{\underline{\varphi(f(\underline{v}))}}$ $\square$

16.18 Satz:
Der Bidualraumhomomorphismus ω_V ist injektiv. Er ist genau dann ein Isomorphismus, wenn V endlich-dimensional ist.

Beweis:
ω_V injektiv: Sei $\underline{v} \in V$ derart, dass
$\omega_V(\underline{v}) = (\text{Nullabbildung } V^* \to K)$. Dann ist

$$\omega_V(\underline{v})(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V^*, \text{ also}$$
$$\varphi(\underline{v}) = 0 \quad \forall \varphi \in V^*$$

Falls $\underline{v} \neq \underline{0}$, können wir $(\underline{v})$ zu einer Basis B von V ergänzen und eine Linearform $\underline{v}^*$ definieren durch

$$\underline{v}^*(\underline{v}) := 1 \in K$$
$$\underline{v}^*(\underline{b}) := 0 \in K \text{ für jeden Basisvektor } \underline{b} \neq \underline{v}.$$

Dann gilt aber für $\varphi := \underline{v}^*$:

$$\varphi(\underline{v}) \neq \underline{0} \quad ↯$$

Also muss $\underline{v} = \underline{0}$ sein.

ω_V Isomorphismus falls V endlich-dim.:
ω_V injektiv und $\dim V = \dim V^*$ nach Kor. 16.5.
Nutze nun Korollar 5.19.

ω_V nicht surjektiv falls V nicht endlich-dim.:
Sei $B = (\underline{b}_i)_{i\in I}$ eine Basis von V.
Def. $B^* = (\underline{b}_i^*)_{i\in I}$ wie in Def. 16.3 durch

$$\underline{b}_i^*(\underline{b}_j) := \delta_{ij}$$

Dann ist B^* zwar nicht unbedingt eine Basis von V^*, ist aber zumindest linear unabhängig und lässt sich daher zu Basis B^+ von V^* ergänzen.

Jedes $\underline{v} \in V$ hat die Form

$$\underline{v} = \sum a_i \cdot \underline{b}_i \quad \text{für gewisse } a_i \in K,$$

wobei fast alle $a_i = 0$.

Also ist

$$\left.\begin{array}{l} \omega_V(\underline{v})(\underline{b}_j^*) = \underline{b}_j^*(\underline{v}) = a_j = 0 \\ \qquad \text{für fast alle } j \in I. \end{array}\right\} (*)$$

Definiere $\alpha \in V^{**}$ durch

$$\alpha : V^* \longrightarrow K$$

$$\underline{b} \longmapsto 1 \quad \text{für jeden Basisvektor } \underline{b} \text{ aus } B^+.$$

Dann ist insbesondere $\alpha(\underline{b}_j^*) \neq 0 \ \forall j \in I$. $(**)$

Vergleich von $(*)$ & $(**)$ zeigt:

α ist nicht von der Form $\omega_V(\underline{v})$. $\square$

Spezialfall: euklidische VR

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ endlich-dim. euklidischen VR.

16.19 Satz: Die Abbildung

$$\Psi: V \longrightarrow V^*$$
$$\underline{v} \longmapsto \langle \underline{v}, - \rangle \quad (\underline{v}' \longmapsto \langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle)$$

definiert einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-VR.

Für euklidische VR gibt es also einen **kanonischen** Isomorphismus $V \cong V^*$.

unabhängig von Basiswahl

Beweis:

- $\langle \underline{v}, - \rangle \in V^*$, da $\langle -,- \rangle$ in 2. Komponente linear.
- Ψ linear, da $\langle -,- \rangle$ in 1. Komponente linear.
- Ψ injektiv:

  Ist $\Psi(\underline{v}) = 0$, so ist $\langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle = 0$ für alle $\underline{v}'$,

  also insbesondere $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0$.

  Da $\langle -,- \rangle$ positiv-definit ist, folgt $\underline{v} = \underline{0}$.
- Ψ Isomorphismus, da Ψ injektiv und $\dim V = \dim V^*$ (nutze wieder Kor. 5.19). $\square$